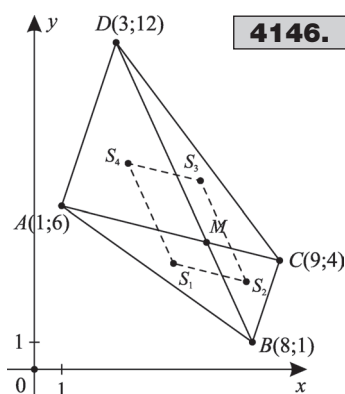


Vegyes feladatok

**4146.****4146.** Legyen az átlók metszéspontja $M(m_1; m_2)$. Ekkor

$$S_1\left(\frac{9+m_1}{3}; \frac{7+m_2}{3}\right);$$

$$S_2\left(\frac{17+m_1}{3}; \frac{5+m_2}{3}\right); \quad S_3\left(\frac{12+m_1}{3}; \frac{16+m_2}{3}\right);$$

$$S_4\left(\frac{4+m_1}{3}; \frac{18+m_2}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{S_1S_2}\left(\frac{17+m_1}{3} - \frac{9+m_1}{3}; \frac{5+m_2}{3} - \frac{7+m_2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{S_1S_2}\left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right). \quad \overrightarrow{S_4S_3}\left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{S_1S_2} \# \overrightarrow{S_4S_3}.$$

4147. $e: x+2y=4$, $g \perp e$, $g: 2x-y=3$. $e \cap g = T$; $T(2; 1)$.

$$2 = \frac{5+x_1}{2}, \quad 1 = \frac{7+x_2}{2} \Rightarrow M'(-1; -5).$$

4148. $3x+y=-9$.**4149.** $n(12; 5)$, az egyenes egyenlete: $12x+5y=32$. A tengelyeket az $A\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{32}{5}\right)$ pontokban metszi. AB felezőpontja: $F\left(\frac{4}{3}; \frac{16}{5}\right)$ a köré írt kör középpontja. $S\left(\frac{8}{9}; \frac{32}{15}\right)$. $|AO| = \frac{8}{3}$; $|AB| = \frac{104}{15}$; $AO:AB = 5:13$ Az A -ból induló szögfelező $5:13$ arányban osztja az

$$OB \text{ oldalt, így } OT:TB = 5:13 \Rightarrow T\left(0; \frac{16}{9}\right). \quad f_a: A\left(\frac{8}{3}; 0\right), T\left(0; \frac{16}{9}\right) \Rightarrow \underline{\underline{2x+3y = \frac{16}{3}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O\left(\frac{16}{15}; \frac{16}{15}\right).$$

4150. $5x+3y=5$.**4151.** $M(m; 0)$, $\overrightarrow{AM}(m+4; -4)$, $\overrightarrow{BM}(m-2; 4)$, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} =$
 $= (m+4)(m-2) - 16 = 0 \Rightarrow M_1(4; 0), M_2(-6; 0)$.**4152.** $M(-1; 0)$.**4153.** $\overrightarrow{AM} \perp BC$, $BC: x+3y=31$; $\overrightarrow{BM} \perp AC$, $AC: x+5y=7$; $AC \cap BC = C$;
 $C(67; -12)$.**4154.** a) $AB=2$, $AC=2\sqrt{5}$; $BC=4$. b) $A_1(4; 4)$, $B_1(4; 3)$, $C_1(2; 3)$. c) $S\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$;
d) $r = \sqrt{5}$.**4155.** a) $CA: y=x+1$, $DB: 7x+5y=3$, $CA \cap DB = M$; $M\left(-\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.b) $\omega = 80,5^\circ$. c) $t = 42$ területegység. $k = 4\sqrt{13} + \sqrt{10} + \sqrt{122}$.

4156. a) $\left. \begin{matrix} 5x - 3y = 1 \\ 15x - y = 67 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A(5; 8); \left. \begin{matrix} 5x - 3y = 1 \\ 5x + y = 13 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B(2; 3); \left. \begin{matrix} 15x - y = 67 \\ 5x + y = 13 \end{matrix} \right\} \Rightarrow C(4; -7).$

b) $AB = \sqrt{34}, BC = \sqrt{104}, AC = \sqrt{226}. \vec{AB}(-3; -5), \vec{AC}(-1; -15), \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 + 75 = 78; \sqrt{34} \cdot \sqrt{226} \cdot \cos \alpha = 78 \Rightarrow \alpha = 27,15^\circ; \beta = 137,73^\circ; \gamma = 15,12^\circ.$

c) $t = \frac{\sqrt{34} \cdot \sqrt{226} \cdot \sin 27,15^\circ}{2} = 20$ területegység.

4157. $A(0; 0); B(9; 0). C(2; 4); t = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18$ területegység; $\alpha = 63,43^\circ;$

$\beta = 29,74^\circ; \gamma = 86,83^\circ.$

4158. $A(3; 0), B(0; 9), C(18; 0), D(0; -6). AD: 2x - y = 6; BC: x + 2y = 18.$

$AD \cap BC: \left. \begin{matrix} 2x - y = 6 \\ x + 2y = 18 \end{matrix} \right\} \Rightarrow M(6; 6),$ ami kielégíti az $x - y = 0$ egyenletű egyenest.

4159. Az adott befogóra a P_2 pont illeszkedik. A P_1 -ből az $y = -x + 8$ egyenletű egyenesre állított merőleges talppontja adja a keresett csúcsot. $P_3(2; 6).$

4160. $M(4; 1).$

4161. Az azonos t -hez tartozó egyenesek metszéspontja a $2x + 3y = 5x - 7y \Rightarrow 3x - 10y = 0$ egyenletű egyenesen vannak. Az egyenes minden pontja és csakis ezek a pontok tartoznak a mértani helyhez.

4162. $A(4; 0), B(0; 3), F\left(2; \frac{3}{2}\right), f: -4x + 3y = -\frac{7}{2},$

$P\left(\frac{7}{8}; 0\right); t_{OAB} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6; t_1 = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{75}{32};$

$t_2 = 6 - \frac{75}{32} = \frac{117}{32}.$

4163. $A(2; 5); B(5; 1). AC: x - y = 1;$

$BC: 2x - 5y = 5; AC \cap BC = C; C(0; -1).$

4164. $A(0; 10), B(8; 0), C(x; 14),$

$x > 0; t = \frac{1}{2} |0 + 8(14 - 10) + x(10 - 0)| =$

$= \frac{1}{2} |32 + 10x| = |16 + 5x|, |16 + 5x| = 36 \Rightarrow x = 4.$

4165. $A(4; 3); B(10; 6), C(6; 12); D(2; 5). \vec{AC}(2; 9); \vec{DB}(8; 1); \vec{AC} \cdot \vec{DB} = 25;$

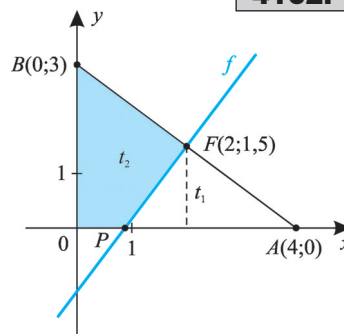
$|\vec{AC}| = \sqrt{85}; |\vec{DB}| = \sqrt{65}; 25 = \sqrt{85} \cdot \sqrt{65} \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{17 \cdot 13}}.$

$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{25}{17 \cdot 13}} = \frac{14}{\sqrt{17 \cdot 13}}; t = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{85} \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{14}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} = 35$ területegység.

4166. $t = \frac{1}{2} |1 \cdot (4 - 6) + 0 \cdot (6 - 0) + c(0 - 4)| = \frac{1}{2} |-2 - 4c| = |1 + 2c|, |1 + 2c| = 13 \Rightarrow \Rightarrow c_1 = 6, c_2 = -7.$

V

4162.



4167. a) $A(-9; -6)$, $B(10; -7)$, $C(6; 8)$. $\vec{AB}(19; -1)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{362}$, $\vec{AC}(15; 14)$,
 $|\vec{AC}| = \sqrt{421}$, $\vec{BC}(-14; 15)$, $|\vec{BC}| = \sqrt{241}$; $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 15 \cdot 19 - 14 = 271$;
 $271 = \sqrt{421} \cdot \sqrt{362} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 46^\circ$; $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 4 \cdot 15 + 15 \cdot 14 = 150$;
 $150 = \sqrt{421} \cdot \sqrt{241} \cdot \cos \gamma \Rightarrow \gamma = 62^\circ$, $\beta = 72^\circ$. b) $\mathbf{a}(-9; -6)$, $\mathbf{b}(10; -7)$, $\mathbf{c}(6; 8)$;
 $|\mathbf{a}| = \sqrt{117}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{149}$; $|\mathbf{c}| = 10$. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -48 = \sqrt{117} \cdot \sqrt{149} \cdot \cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \Rightarrow$
 $(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \sphericalangle = 111,3^\circ$; $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 4 = \sqrt{149} \cdot 10 \cdot \cos(\mathbf{b}; \mathbf{c}) \Rightarrow (\mathbf{b}; \mathbf{c}) \sphericalangle = 88,1^\circ$;
 $(\mathbf{a}; \mathbf{c}) \sphericalangle = 360^\circ - (111,3^\circ + 88,1^\circ) = 160,6^\circ$.

4168. 20 területegység.

4169. $4x - 5y = 11$.

4170. $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $F\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$, $\mathbf{n}(-a; b)$. Az AB felezőmerőlegese:

$f: -ax + by = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Legyen $d \neq 0$ és $A'(a + d; 0)$, $B'(0; b + d)$. $\vec{A'B'}[-(a + d); b + d]$,

$F'\left(\frac{a + d}{2}; \frac{b + d}{2}\right)$; $A'B'$ felezőmerőlegese: $-(a + d)x + (b + d)y = \frac{(b + d)^2 - (a + d)^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -(a + d)x + (b + d)y = \frac{b^2 - a^2}{2} + (b - a)d \\ ax - by = -\frac{b^2 - a^2}{2} \end{array} \right\} + \Rightarrow -dx + dy = (b - a)d / : d \Rightarrow -x + y =$$

$= b - a$. Az $y = x + b - a$ kifejezést visszahelyettesítve f egyenletébe: $P\left(\frac{a - b}{2}; \frac{b - a}{2}\right)$, ami

d -től független.

4171. a) P_4 -re három megoldást kapunk: $A(-19; -13)$, $B(-1; 27)$, $C(29; -13)$. Mindhárom paralelogramma területe egyenlő a $P_1P_2P_3$ háromszög területének kétszeresével.

$t = 2 \cdot \frac{P_1P_2 \cdot m_{P_3}}{2} = 24 \cdot 20 = 480$ területegység. $P_1P_2 = 25$, $P_2P_3 = \sqrt{481}$, $P_1P_3 = 24$.

$k_1 = 2(P_1P_3 + P_2P_3) = 2(24 + \sqrt{481})$, $k_2 = 2(P_1P_2 + P_2P_3) = 2(25 + \sqrt{481})$,

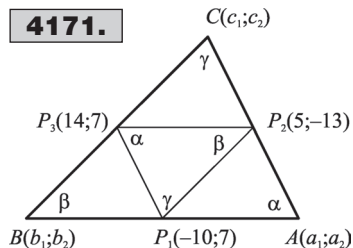
$k_3 = 2(P_1P_2 + P_1P_3) = 98$. b) Egy-egy paralelogramma szöge egyenlő a $P_1P_2P_3$ háromszög

valamelyik szögével. Az $AP_1P_3P_2$ paralelogrammában: $\vec{P_3P_2}(-9; -20)$, $\vec{P_3P_1}(-24; 0)$.

$-24 \cdot (-9) = 24 \cdot \sqrt{481} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 65,8^\circ$,

P_2 szög $= 180^\circ - 65,8^\circ = 114,2^\circ$. A $BP_1P_2P_3$ paralelogrammában: $9(-15) + 20 \cdot 20 = 25 \sqrt{481} \cdot \cos \beta \Rightarrow \beta = 61,1^\circ$, illetve $118,9^\circ$. $CP_3P_1P_2$ paralelogrammában: $\gamma = 53,1^\circ$, illetve $126,9^\circ$.

4172. I. megoldás: AC felezőpontja: $K(2; 1)$, $\vec{KA}(4; -5)$,
 $2 \cdot \vec{KA}(8; -10)$, $\vec{KB}(10; 8)$, $\vec{KD}(-10; -8)$. $\mathbf{b} = \mathbf{k} + \vec{KB} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathbf{b}(12; 9)$, $B(12; 9)$, $\mathbf{d} = \mathbf{k} + \vec{KD} \Rightarrow D(-8; -7)$.



II. megoldás: $K(2; 1)$, $AC = \sqrt{164} \Rightarrow KB = \sqrt{164}$. A keresett B , illetve D pontok rajta vannak AC felezőmerőlegesén, K -tól pedig $\sqrt{164}$ egység távolságra vannak.

Így az $\left. \begin{aligned} (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 164 \\ 4x - 5y &= 3 \end{aligned} \right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják a keresett csúcsoakat.

4173. $AB \cap AD = A$; $\left. \begin{aligned} y &= 1 \\ 4x - 3y &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A(1; 1)$, $AB \cap BD = B$; $\left. \begin{aligned} y &= 1 \\ 2x + y &= 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(6; 1)$,

$AD \cap BD = D$; $\left. \begin{aligned} 4x - 3y &= 1 \\ 2x + y &= 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(4; 5)$. AC felezőpontja azonos BD felezőpontjával

$\frac{c_1+1}{2} = \frac{6+4}{2}$, $\frac{c_2+1}{2} = \frac{1+5}{2} \Rightarrow C(9; 5)$.

4174. $\left. \begin{aligned} ax + by &= 1 / \cdot a \neq 0 \\ bx + ay &= 1 / \cdot b \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a^2 - b^2)x = a - b \Rightarrow x = \frac{1}{a+b}, y = \frac{1}{a+b}$.

Az $M\left(\frac{1}{a+b}; \frac{1}{a+b}\right)$ pont koordinátái kielégítik az $x - y = 0$ egyenletű egyenest.

Ha $a = 0, b \neq 0$, akkor $\left. \begin{aligned} by &= 1 \\ bx &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_1\left(\frac{1}{b}; \frac{1}{b}\right)$. Ha $a \neq 0, b = 0$, akkor $\left. \begin{aligned} ay &= 1 \\ ax &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right)$,

ekkor M_1 , illetve M_2 is kielégítik a harmadik egyenletet. $a = b = 0$ nem lehetséges.

4175. Helyezzük el a háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcspontjainak koordinátái: $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $C(c; d)$ legyen ($a \neq 0, d \neq 0$). Ekkor az oldalak felezőpontjai:

$A_1\left(\frac{a+c}{2}; \frac{d}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{c-ac}{2}; \frac{d}{2}\right)$, $C_1(0; 0)$. Az ABC háromszög súlypontja $S\left(\frac{c}{3}; \frac{d}{3}\right)$, az

$A_1B_1C_1$ háromszög súlypontja $S_1\left(\frac{c}{3}; \frac{d}{3}\right)$. Valóban $S \equiv S_1$.

4176. Legyen $A(a; 0)$, $B(b; 0)$, $C(0; c)$ ($a \neq b, c \neq 0$). Innen $S\left(\frac{a+b}{3}; \frac{c}{3}\right)$.

$AB^2 + BC^2 + CA^2 = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 + c^2 + a^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab$.

$3(AS^2 + BS^2 + CS^2) = 3 \cdot \left[\left(\frac{b-2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a-2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 + \left(\frac{2c}{3}\right)^2 \right] =$

$= 3 \cdot \frac{6a^2 + 6b^2 + 6c^2 - 6ab}{9} = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab$.

4177. $e: 3x + 4y = 16$, $f: 3x + 4y = 1$, $P(5; 3)$. Az E pont az e egyenes tetszőleges pontja $E(0; 4)$. F az f egyenesen: $F_1\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, illetve $F_2(-1; 1)$. A keresett egyenes irányvektora:

\vec{EF}_1 , illetve \vec{EF}_2 . $\vec{EF}_1\left(1; -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(9; 2) \Rightarrow 9x + 2y = 51$; $\vec{EF}_2(-1; -3) \Rightarrow \mathbf{n}(3; -1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - y = 12$.

4178. $P_1(-1; 4)$; $P_2(3; 2)$.

4179. A feladat feltételeinek két egyenes tesz eleget: e_1 átmegy A -n és párhuzamos PQ -val, e_2 átmegy A -n és PQ felezőpontján. $e_1: x + 2y = 15$, $e_2: 3x + y = 15$.



4180. $PM:MQ = 3:2 \Rightarrow m_1 = \frac{2 \cdot (-5) + 3 \cdot 5}{5} = 1; \quad m_2 = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 1}{5} = \frac{11}{5}. \quad M\left(1; \frac{11}{5}\right).$

$PN:NQ = 2:3 \Rightarrow N\left(-1; \frac{14}{5}\right). \quad \overrightarrow{MA}\left(3; \frac{24}{5}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(8; -5), \quad MA: 8x - 5y + 3 = 0. \quad \overrightarrow{NA}\left(5; \frac{21}{5}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(21; -25), \quad NA: 21x - 25y + 87 = 0.$

4181. $3x^2 - 4y^2 + 4xy + 8x - 8y - 3 = 0, \quad 3x^2 - 4y^2 + 6xy - 2xy + 9x - x - 6y - 2y - 3 = 0,$
 $x(3x - 2y - 1) + 2y(3x - 2y - 1) + 3(3x - 2y - 1) = (3x - 2y - 1)(x + 2y + 3) = 0.$

A ponthalmaz két egyenes. A $3x - 2y - 1 = 0$ és az $x + 2y + 3 = 0$ egyenletű egyenesek minden pontja és csak ezek a pontok felelnek meg.

4182. $\overrightarrow{AB}(30; 10) \Rightarrow \mathbf{v}(3; 1), \quad \mathbf{n}(1; -3), \quad AB: x - 3y = 0 \Rightarrow T(9; 3), \quad m_c: 3x + y = 30.$ A C csúcsot m_c metszi ki az AB Thalész köréből. $K(0; 0), \quad r = 15 \Rightarrow x^2 + y^2 = 225.$

$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 225 \\ 3x + y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 30 - 3x, \quad x^2 + (30 - 3x)^2 = 225 \Rightarrow x^2 - 18x + 65 = 0. \quad C_1(13; -9), \quad C_2(5; 15).$

4183. Tükrözzük az A pontot az e egyenesre. A kapott A_1 pontot B -vel összekötve, kimetszi e -ből a keresett P pontot. $T(-2; 0).$ A -t T -re tükrözve: $A_1(2; -10).$ $\overrightarrow{A_1B}(2; 24) \Rightarrow P(3; 2).$

4184. $AB: y = \frac{1}{4}x, \quad e: y = mx - 1,$ ahol $m > \frac{1}{4}.$ Az x tengely \cap -e: $M; \left. \begin{array}{l} y = mx - 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow M\left(\frac{1}{m}; 0\right); \quad AB \cap e = N; \quad \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x \\ y = mx - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow N\left(\frac{4}{4m - 1}; \frac{1}{4m - 1}\right). \quad t_{ABC} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2.$

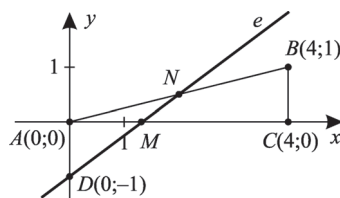
$t_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4m - 1} = 1 \Rightarrow 8m^2 - 2m - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = -\frac{1}{4},$ az utóbbi nem megoldás. Az egyenes egyenlete: $x - 2y = 2.$

4185. a) $t_1 = \frac{1,5 + 0,5}{2} \cdot 2 = 2$ területegység; b) $t_2 = \frac{3 + 1,5}{2} \cdot 2 = 4,5$ területegység.

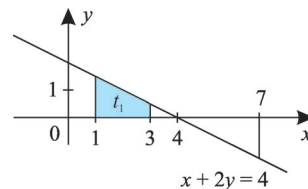
4186. I. megoldás: $\mathbf{a}(-2; -2), \quad \mathbf{b}(4; 2); \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}(6; 4), \quad \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 90^\circ$ -os, illetve -90° -os elforgatottja. $\overrightarrow{BC}_1 = (-6; 9), \quad \overrightarrow{BC}_2 = (6; -9).$ $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b} + \overrightarrow{BC}_1, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{b} + \overrightarrow{BC}_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow C_1(-2; 11), \quad C_2(8; -7). \quad \overrightarrow{BC}_1 = \overrightarrow{AD}_1, \quad \overrightarrow{BC}_2 = \overrightarrow{AD}_2, \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD}_1, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD}_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow D_1(-8; 7), \quad D_2(4; -11).$

II. megoldás: $AB = 2\sqrt{13}, \quad BC = 3\sqrt{13}. \quad BC \perp AB \Rightarrow BC$ egyenlete: $3x + 2y = 16,$

4184.



4185.



$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9 \cdot 13$. A kapott egyenletrendszert megoldva kapjuk a C_1 , illetve C_2 pontot. B -t AC felezőpontjára tükrözve kapjuk D -t.

4187. $a) \left. \begin{array}{l} e: 4x + 7y = 15 / \cdot 2 \\ f: 9x - 14y = 4 \end{array} \right\} + \Rightarrow M(2; 1); \quad -x + 3y = 1.$

$b) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad g: bx + ay = ab.$ Mivel $M \in g \Rightarrow 2b + a = ab, \quad t = 4 = \frac{ab}{2} \Rightarrow ab = 8;$
 $2b + a = 8, \quad a = 8 - 2b. \quad b(8 - 2b) = 8 \Rightarrow (b - 2)^2 = 0 \Rightarrow b = 2, \quad a = 4. \quad g: x + 2y = 4.$

$c) \mathbf{v}_1(7; -4), \mathbf{v}_2(14; 9), \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 62 = \sqrt{65} \cdot \sqrt{277} \cdot \cos(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \Rightarrow (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \sphericalangle = 62,48^\circ.$

4188. $\vec{AB}(4; -3), \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36,9^\circ, \quad \beta = 90^\circ - 36,9^\circ = 53,1^\circ.$

4189. Legyen A merőleges vetülete A_1 , B merőleges vetülete B_1 .

$e: x - y = 0 \left\} + \Rightarrow A_1(4; 4); \quad e: x - y = 0 \left\} + \Rightarrow B_1(2; 2). \quad A_1 B_1 = 2\sqrt{2}.$
 $f: x + y = 8 \left\} \quad g: x + y = 4 \left\}$

4190. $A(-1; 0); \quad B(5; 6).$

4191. Vezessen A -hoz az $\mathbf{a}(2; 3)$, B -hez a $\mathbf{b}(6; 6)$, helyvektor. Az $\vec{AB}(4; 3) + 90^\circ$ -kal, illetve -90° -kal történő elforgatásával kapjuk \vec{AD}_1 -et, illetve \vec{AD}_2 -t. $\vec{AD}_1(-3; 4), \vec{AD}_2(3; -4).$

$\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \vec{AD}_1, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{a} + \vec{AD}_2 \Rightarrow D_1(-1; 7), \quad D_2(5; -1). \quad \vec{BC}_2 = \vec{AD}_2, \quad \vec{BC}_1 = \vec{AD}_1, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{b} + \vec{BC}_1,$
 $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} + \vec{BC}_2 \Rightarrow C_1(3; 10), \quad C_2(7; 2).$

4192. $2 \cdot AS = 1 \cdot SB \Rightarrow AS:SB = 1:2 \Rightarrow S(5; 1).$

4193. $AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \quad t = 10 = \frac{AB \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = \frac{20}{5\sqrt{2}}. \quad C(c; 0). \quad \vec{AB}(7; -1) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 7),$

$AB: x + 7y = 12 \Rightarrow \frac{x + 7y - 12}{5\sqrt{2}} = 0. \quad \frac{|c - 12|}{5\sqrt{2}} = \frac{20}{5\sqrt{5}} \Rightarrow |c - 12| = 20, \quad c_1 = 32, \quad c_2 = -8.$

$C_1(32; 0), \quad C_2(-8; 0).$

4194. $\mathbf{p}(2; 4), \mathbf{p}_1(-3; 0), \mathbf{o}_1 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1), \quad O_1(5; 4).$

4195. $CD: x + 2y = 17, \quad BC: 2x + y = 5.$

4196. Legyen a $P(2; -2)$ ponton áthaladó egyenesek egy normálvektora $\mathbf{n}(1; n)$. Ekkor:

$x + ny = 2 - 2n \Rightarrow \frac{x + ny + 2n - 2}{\sqrt{1 + n^2}} = 0, \quad \frac{|5 + 2n + 2n - 2|}{\sqrt{1 + n^2}} = 3 \Rightarrow |4n + 3| = 3\sqrt{1 + n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7n^2 + 24n = 0, \quad n = 0 \text{ vagy } n = -\frac{24}{7}. \quad \mathbf{n}(1; 0), \quad P(2; -2) \Rightarrow x = 2; \quad \mathbf{n}(7; -24), \quad P(2; -2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x - 24y = 62.$

4197. Legyen $e_1: x + 2y = 1, \quad e_2: x + 2y = 3. \quad P \in e_1 \Rightarrow P(-1; 1), \quad Q \in e_2 \Rightarrow Q(-1; 2).$

$PR:RQ = 1:3 \Rightarrow R\left(-1; \frac{5}{4}\right).$ A keresett egyenes átmegy az R ponton és párhuzamos az adott egyenesekkel: $2x + 4y = 3.$

4198. $e: x + y = 1 \left\} + \Rightarrow A(2; -1). \quad AS:SA_1 = 2:1 \Rightarrow A_1\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right).$
 $f: y = -1 \left\}$

Legyen $B \in f \Rightarrow B(b; -1)$, $C \in e \Rightarrow C(c; 1-c)$. BC felezőpontja: $A_1: \frac{b+c}{2} = -\frac{5}{2}$,
 $\frac{-1+1-c}{2} = \frac{1}{2}$. Innen: $B(-4; -1)$, $C(-1; 2)$. $\vec{BC}(3; 3) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -1)$, $BC: x-y = -3$.

4199. $e: y = x + 1$, $f: y = x - 2$, $P_1(0; 1) \in e$, $P_2(0; -2) \in f$, $Q_1(-1; 0) \in e$,
 $Q_2(2; 0) \in f$. $P_1P_2 = Q_1Q_2 = 3$, ezért a keresett egyenesek: $x = 0$, illetve $y = 0$.

4200. Legyen $A(1; 2)$, $B(-1; -1)$, $f: 2x + y = 1$. Az A pontot f -re tükrözve az A_1 pont a BC
oldalegyenesre illeszkedik. A BC és az f egyenesek metszéspontja adja a keresett C csúcsot.

$$C\left(-\frac{13}{5}; \frac{31}{5}\right).$$

4201. $A(1; 1) \in f_a: 2x - y = 1$. Tükrözzük a B pontot az f_a egyenesre $\Rightarrow B_1 \in AC$. $g \perp f_a \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathbf{n}_g(1; 2)$, $g: x + 2y = 13$. $f_a \cap g = T$; $\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow T(3; 5)$. Tükrözzük B -t a T -re,

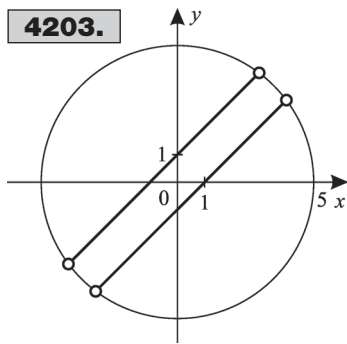
$B_1(1; 6)$. Így: $AC = AB_1: x = 1$, $AB: 3x - 4y = -1$. $C \in AC \Rightarrow C(1; c)$. $t_{ABC} = \frac{AC \cdot m_b}{2} =$
 $= \frac{|c-1| \cdot 4}{2} = 5 \Rightarrow |c-1| = \frac{5}{2}$. $c_1 = \frac{7}{2}$, $c_2 = -\frac{3}{2}$, ami nem megoldás; $C\left(1; \frac{7}{2}\right)$.

Innen BC egyenlete: $x - 8y = -27$.

4202. $B(6; 4)$, $e = BC$, $AC \perp BC$, ezért $AC: x - y = -4$. $AC \cap BC = C$; $C(3; 7)$.

$AB = 2\sqrt{17}$, $AC = 5\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$; $\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = \frac{15}{\sqrt{17}}$.

4203.



$$\mathbf{4203.} \frac{(x-y)^2 - 1}{\sqrt{25-x^2-y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{(x-y-1)(x-y+1)}{\sqrt{25-x^2-y^2}} = 0.$$

4204. A bal oldali kifejezés átalakítva. $3x^2 - (8y+5)x -$
 $-(3y^2 - 5y - 2) = 0$. Az egyenlet gyöktényezős alakban.
 $(x-3y-1)(3x+y-2) = 0$. A keresett pontok a két egye-
nes pontjainak uniója. Mindkét egyenes két-két különböző
pontban metszi a koordinátatengelyeket:

$P_1\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, $P_2\left(0; -\frac{1}{3}\right)$, $P_3(1; 0)$, $P_4(0; 2)$. A $P_2P_3P_4$ háromszög

magasságpontja a $P_1\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ pont.

4205. $y - 1 = m(x - 2)$, mert az y tengellyel párhuzamos egyenesek nem elégítik ki a feltételt.

$$M_1; \left. \begin{array}{l} y = mx - 2m + 1 \\ y = x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow M_1\left(\frac{2m+4}{m-1}; \frac{7m-1}{m-1}\right), m \neq 1;$$

$$M_2; \left. \begin{array}{l} y = mx - 2m + 1 \\ y = x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow M_2\left(\frac{2m-3}{m-1}; \frac{1}{m-1}\right).$$

$M_1M_2^2 = \left(\frac{7}{m-1}\right)^2 + \left(\frac{7m}{m-1}\right)^2 = 25 \Rightarrow 12m^2 + 25m + 12 = 0$. $m_1 = -\frac{3}{4}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$. A keresett
egyenesek: $3x + 4y - 10 = 0$, illetve $4x + 3y - 11 = 0$.

4206. $P_1(x_1; y_1), P_2(x_2; y_2), Q_1\left(3x_1; \frac{y_1}{3}\right), Q_2\left(3x_2; \frac{y_2}{3}\right)$. $P_1P_2 = Q_1Q_2 \Rightarrow P_1P_2^2 = Q_1Q_2^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 9(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{9}(y_2 - y_1)^2, \frac{8}{9}(y_2 - y_1)^2 = 8(x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 = 9.$

$\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$. Azok a szakaszok elégítik ki a feladat feltételeit, amelyek meredeksége ± 3 .

4207. Az $AEFG$ négyzet csúcsai: $A(0; 0), E(4; -4), F(0; -8), G(-4; -4)$. A BE egyenes egyenlete: $-x + 3y = -8$, a CF egyenes egyenlete: $-2x + y = -8$, a DG egyenes egyenlete: $3x + y = 8$. $BE \cap CF: P\left(\frac{16}{5}; -\frac{8}{5}\right)$. $P \in DG$.

4208. A csúcspontok koordinátái: $A_1(-2\sqrt{3}; 2), B_1(3; -3\sqrt{3}), C_1(3 + 2\sqrt{3}; 2 + 3\sqrt{3})$,
 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 2\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$.

4209. Az ABC háromszög súlypontja: $S_1(5; 3; 0)$. A BCD háromszög súlypontja:

$S_2\left(\frac{19}{3}; \frac{13}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Az ACD háromszög súlypontja: $S_3\left(\frac{13}{3}; \frac{11}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Az ABD háromszög súly-

pontja: $S_4\left(\frac{10}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$. $DS_1^2 = (4 - 5)^2 + (4 - 3)^2 + 4^2 = 18, AS_2^2 = \frac{546}{9}; BS_3^2 = \frac{66}{9};$

$CS_4^2 = \frac{530}{9}$. Az élek hosszának négyzetei: $AB^2 = 40, BC^2 = 34, AC^2 = 130, AD^2 = 48,$

$BD^2 = 24, CD^2 = 50$. Ekkor $\frac{1304}{9}:326 = 4:9$.

4210. $C(1; 5)$. Az AB egyenlete: $x + 3y = 30$. $AB \cap s_c = C_1(3; 9)$. A Thalész-kör középpontja: $C_1(3; 9)$, a sugara: $r = CC_1 = \sqrt{20}$. Az A és a B csúcsok koordinátáit az

$(x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 20$
 $x + 3y = 30$ egyenletrendszer gyökei adják.

$A(3 + 3\sqrt{2}; 9 - \sqrt{2}), B(3 - 3\sqrt{2}; 9 + \sqrt{2})$.

4211. Kössük össze a paralelogramma belsejében vagy az oldalán elhelyezkedő, a csúcsoktól különböző rácspontot a paralelogramma csúcsaival. Ekkor négy vagy három háromszög keletkezik. A $t = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ területképlet szerint, mivel a háromszögek csúcsainak koordinátái egész számok, $t \geq \frac{1}{2}$. Ebből már következik a feladat igaz állítása.

$T \geq 4 \cdot \frac{1}{2}$, vagy $T \geq 3 \cdot \frac{1}{2}, T > 1$.

4212. AC -vel párhuzamos egyenes egyenlete $y = x$. $M(3; 3), N\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$. $t_{ABC} = 6$ terület-egység, $t_{AMNC} = 4,5$ területegység.

4213. A négyszög csúcspontjai legyenek: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$. Ekkor az AB felezőpontja: $F_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, a BC oldal felezőpontja az F_2 , a CD oldal felezőpontja F_3 , a DA oldal felezőpontja F_4 . Legyen az F_1F_3 felezőpontja P , az F_2F_4 felezőpontja Q . $P\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}; \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$, $Q\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}; \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$. Innen látható, hogy $P \equiv Q$. Legyen az AC átló felezőpontja E , a BD átló felezőpontja G . $E\left(\frac{x_1+x_3}{2}; \frac{y_1+y_3}{2}\right)$, $G\left(\frac{x_2+x_4}{2}; \frac{y_2+y_4}{2}\right)$. Könnyen igazolható, hogy az EG felezőpontja $M \equiv P \equiv Q$.

Megjegyzés: A tétel állítása igazolható úgy is, ha a csúcsok helyvektoraival, az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} vektorokkal számolunk.

4214. A $P(x; y)$ pont koordinátáira felírhatjuk a következő egyenletet:

$(x-4)^2 + y^2 + 20 = x^2 + (y-2)^2$. Innen $2x - y - 8 = 0$. A mértani hely egyenes, amelynek minden pontja megfelel.

4215. A háromszög csúcseinak koordinátái: $A(-6; 0)$, $B(6; 0)$, $C(u; -3u+5)$, A súlypont koordinátái: $S(x; y)$. Ekkor $x = \frac{u}{3}$, $y = \frac{5-3u}{3}$. Innen $y = \frac{5-9x}{3}$, a súlypont a $9x + 3y = 5$ egyenletű egyenesen mozog. Nem keletkezik háromszög, ha a C csúcs az x tengelyen van.

A $P\left(\frac{5}{9}; 0\right)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

4216. Az AB egyenes egyenlete $3u + 5v = 30$. Az átfogó P pontjának koordinátái

$\left(u; \frac{30-3u}{5}\right)$, ahol $0 < u < 10$. A téglalap K középpontjának koordinátái $x = \frac{u}{2}$, $y = \frac{30-3u}{10}$,

ahol $0 < u < 5$. A mértani hely pontjainak koordinátái között az $y = \frac{30-3 \cdot 2x}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 5y = 15$ összefüggés áll fenn. A mértani hely egyenes szakasz, a szakasz végpontjai nem tartoznak a ponthalmazhoz.

4217. A $K(u; v)$ középpont rajta van az $u - v = -2$ egyenesen, másrészt $r = |v|$ és $(u-7)^2 + (v-2)^2 = v^2$. Megoldás: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ és $(x-15)^2 + (y-17)^2 = 289$.

4218. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

4219. $t \approx 30,2$ területegység.

4220. Helyezzük el az $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ csúcspontokkal adott háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a háromszög S súlypontja az origóban legyen. Ekkor $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. A $P(x; y)$ pontra (1)

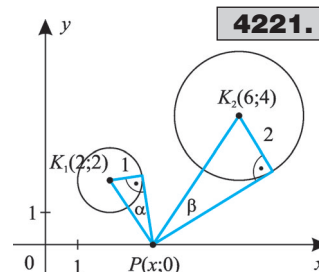
$PA^2 + PB^2 + PC^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 3(x^2 + y^2)$, mert $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Az (1) összeg akkor minimális, ha $x = y = 0$, $P \equiv S$.

4221. A feladat szerint azt követeljük, hogy $\alpha = \beta$ legyen.

Ekkor felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$$\frac{1}{K_1P} = \frac{2}{K_2P} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2+4} = \frac{4}{(x-6)^2+16}.$$

Két megoldás van. $P_1\left(\frac{10}{3}; 0\right)$, $P_2(-2; 0)$.



4221.

4222. Az érintési pontok: $E_1(11; -9)$, $E_2(11; -25)$. Az adott kör középpontja: $K(17; -17)$. Az E_1 pontban érintő kör

középpontja rajta van az E_1K egyenesen, amelynek egyenlete: $4x + 3y = 17$. Az érintő kör középpontja $K^*(u; v)$, a sugara $r = |v|$. Felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$\left. \begin{aligned} 4u + 3v = 17 \\ (u - 11)^2 + (v + 9)^2 = v^2 \end{aligned} \right\} \text{Két megoldás van: } (x - 8)^2 + (y + 5)^2 = 25;$$

$(x - 38)^2 + (y + 45)^2 = 2025$. Hasonló megfontolással kapjuk az $E_2(11; -25)$ pontban érintő kör egyenletét. Itt is két megoldás van:

$$(x + 64)^2 + (y + 125)^2 = 15625 \text{ és } \left(x - \frac{58}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{125}{9}\right)^2 = \left(\frac{125}{9}\right)^2.$$

4223. A keresett kör középpontja $K(u; v)$ ahol $v = 8$. A sugár $r = 12 - u$, $OK = 4 + r$, ahol O az origó. Ekkor $\sqrt{u^2 + 64} = 4 + 12 - u$. Innen $u = 6$. Megoldás: $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 36$.

4224. A húr F felezőpontját megkapjuk, ha a $K(4; -2)$ ponton átmenő és az adott egyenesre merőleges egyenes egyenletét felírjuk, azután a két egyenes közös pontját kiszámítjuk. $F\left(1; \frac{11}{2}\right)$.

$$R^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + KF^2. \text{ A kör egyenlete: } (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = \frac{171}{2}.$$

4225. Mivel $x^2 + y^2 = 1$, ezért $x^2 + xy + y^2 = 1 + xy$. Szükséges, hogy x és y azonos előjelű legyen.

$$\text{Ha } x > 0 \text{ és } y > 0, \text{ akkor } xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2}. \left[\sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \right]!$$

$$\text{Tehát } x^2 + xy + y^2 \leq \frac{3}{2}. \text{ Egyenlőség akkor van, ha } x = y; \quad P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4226. A k_1 és k_2 körök metszik egymást, mert $CD = 10 < 2\sqrt{50}$. Az AB húr egyenesének egyenlete: $4x + 3y = 11$; $\vec{DC}(8; 6)$; $\frac{\vec{DC}}{2}(4; 3)$. Ebből következik, hogy $DC \perp AB$. Az $ADBC$

négyszög rombusz. $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2$; $AB = 10$ egység. $t_{ADBC} = 50$ területegység.

4227. $a = -3$. Az $x - 3y = 7$ egyenes érinti az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kört, ha $r^2 = \frac{49}{10}$.

V